Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Гусева М.В.,
учитель математики МОУ Балахнинской СОШ
2018

Введение в тему:

1. Решите уравнение:

$x^2 = 4$;

$x = \pm 2$.

2. Решите уравнение:

$x^2 = 7$;

$x = \pm\sqrt{7}$

3. Решите уравнение:

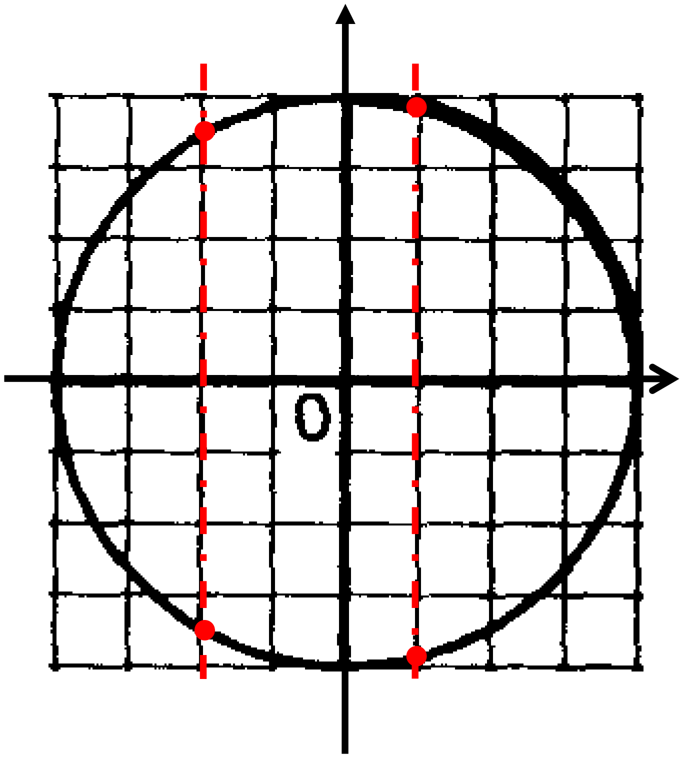
$\cos t = -1/2$

$t = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

4. Решите уравнение:

$\cos t = 1/4$

$t = ?$



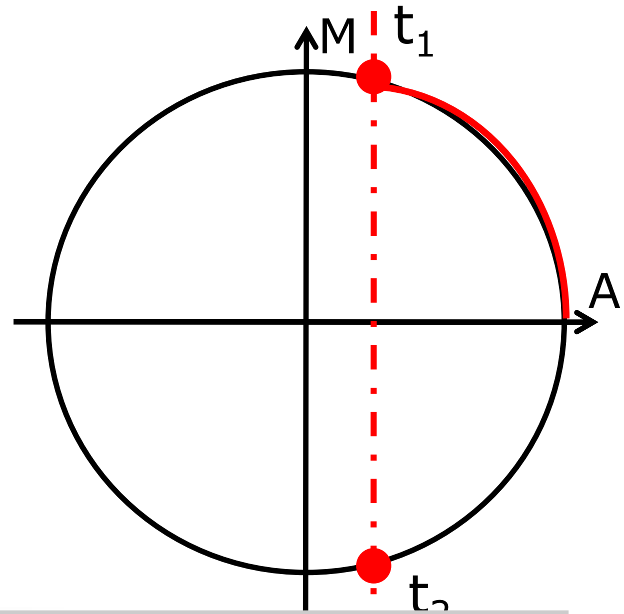
cos t = 1/4

$t = t_1 + 2\pi k,\ k \in Z$

$t = t_2 + 2\pi k,\ k \in Z$

Где t_1 – длина дуги АМ,

а $t_2 = -t_1$



arccos a

дуга ***cos которой равен a***

<u>Выводы:</u> аркфункции это конкретные числа.

Арксинусом числа а называется такое число из отрезка [-π/2; π/2], синус которого равен а.

$$\arcsin a = t <=> \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin t = a. \end{cases}$$

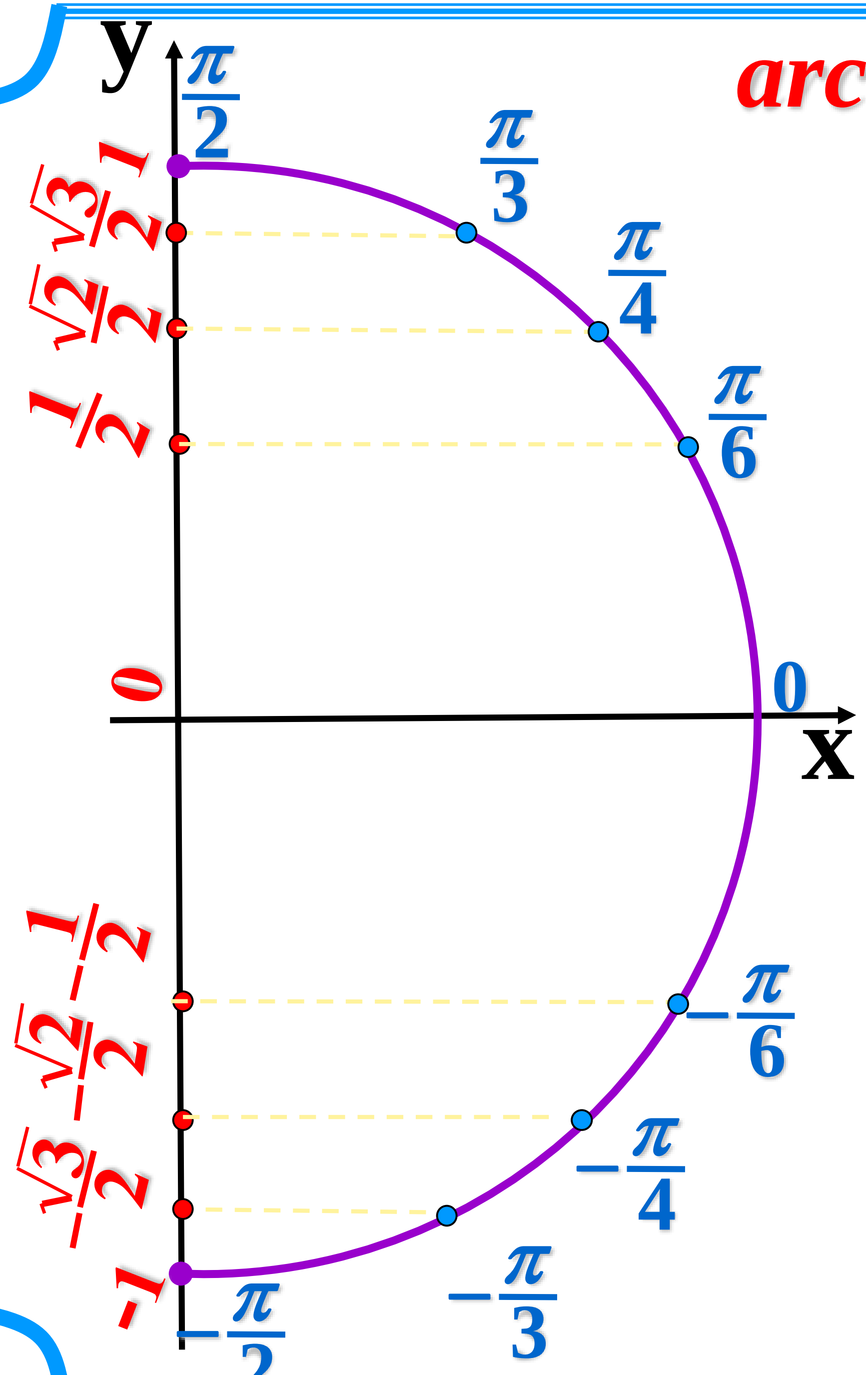
$\alpha \in [-1; 1]$

arcsin0,6 =t

arcsin1/2 =t
π/6

$\sin t = 1/2 \Rightarrow$ $t_1 = \pi/6,$ $\pi/6 \in [-\pi/2; \pi/2]$

$t_2 = 5\pi/6$ $5\pi/6 \notin [-\pi/2; \pi/2]$



arcsin a – это такое число α, синус которого равен a

$$a \in [-1;1] \qquad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin 0$$

$$\arcsin 1{,}5$$

Не существует

$$\arcsin \frac{1}{2}$$

$$\arcsin \sqrt{3}$$

Не существует

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arcsin 1$$

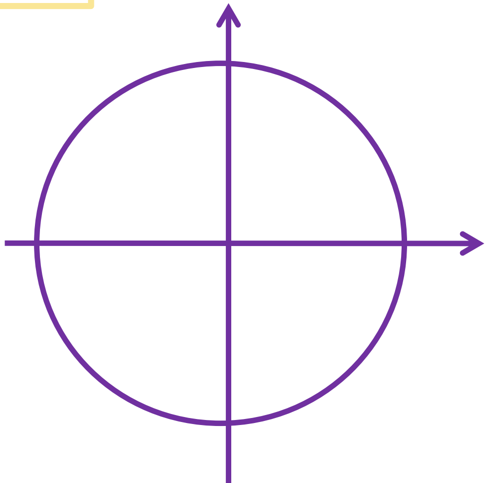
Арккосинусом числа а называется такое число из отрезка [0; π], косинус которого равен а.

$$\arccos a = t \iff \begin{cases} 0 \le t \le \pi, \\ \cos t = a. \end{cases}$$

$\alpha \in [-1; 1]$

arccos(-1/3) =t

arccos1/2 =πt/3

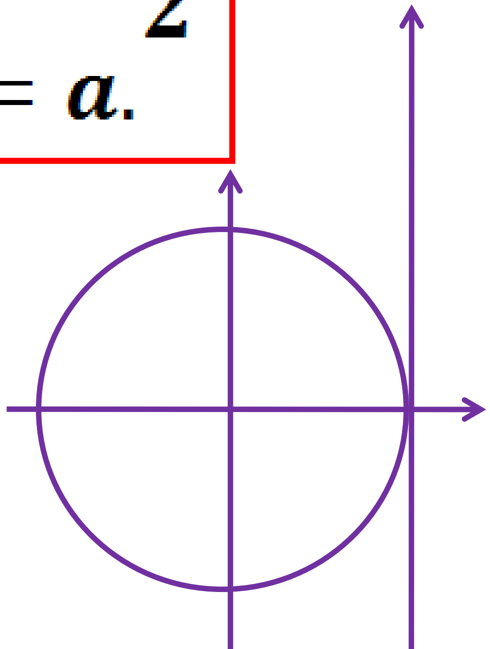


Арктангенсом числа а называется такое число из интервала (-π/2; π/2), тангенс которого равен а.

$$arctga = t <=> \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \\ tgt = a. \end{cases}$$

$\alpha \in (-\infty;\ +\infty)$

arctg1/7 =t



arctg1 =π/4

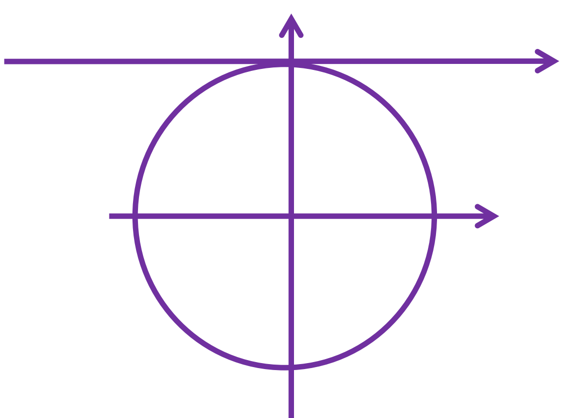
Арккотангенсом числа а называется такое число из интервала(0; π), котангенс которого равен а.

$$\boxed{arcctg\,a = t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \pi, \\ ctg\,t = a. \end{cases}}$$

$\boxed{\alpha \in (-\infty; +\infty)}$

arcctg(-2,7) =t

arcctg(-1) =3π/4



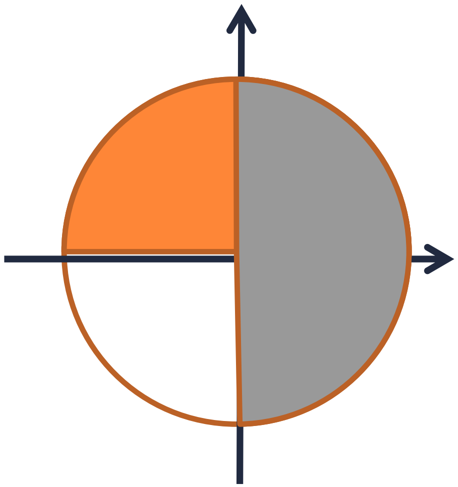
Для чего нужны аркфункции?

$x^2=9$ → $x=\pm 3$

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ → $t = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$

$x^2=17$ → $x = \pm\sqrt{17}$

$\sin t = -1/9$ → $t = \arcsin(-1/9)$



Какие из чисел являются арксинусами, арккосинусами, арктангенсами и арккотангенсами

$\pi/4$

$\pi/2$

$-2\pi/3$

3

$70°$

$-\pi/6$

$2/7$

$3\pi/4$

$3\pi/2$

1

$\sqrt{3}$

Имеют ли смысл выражения?

$arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ – да, т.к. $\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1;1]$

$arccos\sqrt{3}$

$arctg(-10)$

$arcctg\frac{1}{7}$

$arcsin(\sqrt{3}-1)^2$

$arcsin(-3)$

$arccos(-\sqrt{3})$

ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

для $a \in [-1; 1]$: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

для $a \in [-1; 1]$: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

для $a \in R$: $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$

для $a \in R$: $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$

ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

для $a \in [0; \pi]$: $\arccos(\cos a) = a$

для $a \in [-\pi/2; \pi/2]$: $\arcsin(\sin a) = a$

для $a \in (-\pi/2; \pi/2)$: $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, a) = a$

для $a \in (0; \pi)$: $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, a) = a$

Выясните, верно ли равенство

$arcsin(-1)=\frac{3\pi}{2}$ нет, т.к. 1) $sin\frac{3\pi}{2}=-1$, но 2) $\frac{3\pi}{2}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$arccos\,1/2=\pi/3$ т.к. 1) и 2)

$arcsin\sqrt{3}/2=2\pi/3$ т.к. 1) 2)

$arccos\,1=\pi$ т.к. 1) 2)

$arctg\left(-\sqrt{3}/3\right)=5\pi/6$ т.к. 1) , 2)

$arctg(-1)=-\pi/4$ т.к. 1) , 2)

$arcctg\sqrt{3}=\pi/6$ т.к. 1) , 2)

$arcctg\left(-\sqrt{3}\right)=5\pi/6$ т.к. 1) , 2)

$arctg\sqrt{3}/2=\pi/3$ т.к. 1) , 2)

$arccos\left(-\sqrt{2}/2\right)=3\pi/4$ т.к. 1) , 2)

Какие значения может принимать выражение?

1) $\arcsin\alpha + \dfrac{\pi}{2}$

$\ldots\ldots\ldots \le \arcsin a \le \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots \le \arcsin a + \dfrac{\pi}{2} \le \ldots\ldots\ldots$

2. arccosa – 3?

а) $tg(arctg\,4)$;	4	г) $ctg(arcctg\,5)$;	5
б) $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;	$\frac{12}{13}$	д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
в) $\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$;	$\frac{1}{4}$	е) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\frac{4}{5}$

Итак, нужно найти $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$
Что называется арккосинусом числа a?	1) Пусть $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$, тогда $0\le\alpha\le\pi,\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$.
Как найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$?	2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\lvert\sin\alpha\rvert=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.
Как определить знак $\sin\alpha$?	3) $0\le\alpha\le\pi$, значит, $\sin\alpha>0$, т.е. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Ответ: $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$.

$$\cos(\arcsin\frac{2}{3})$$

1. Пусть $\arcsin\frac{2}{3} = \alpha,\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ \sin\alpha = \frac{2}{3}.$

2. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$, т.е. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

Ответ: $\cos(\arcsin\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

$$\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=1-2\cdot\frac{9}{25}=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

1) $\sin(2\arcsin\frac{3}{5})$;   2) $\sin(\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3})$;   3) $\sin(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13})$